ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I»
(ФГБОУ ВПО ПГУПС)

Кафедра «Экономика транспорта»

В.Г. Карчик

Методические рекомендации по выполнению курсового проекта

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ» (Б1.В.ОД.5)

для направления
38.03.01 «Экономика»
по профилю
«Экономика предприятий и организаций (транспорт)»

Форма обучения – очная, заочная

Санкт-Петербург
2016

Методические рекомендации по выполнению курсового проекта по дисциплине «Математические модели в экономике» по направлению 38.03.01 «Экономика» по профилю подготовки «Экономика предприятий и организаций (транспорт)», разработаны доцентом кафедры «Экономика транспорта» к.э.н., доцентом В.Г. Карчиком.

Рассмотрены и утверждены на заседании кафедры
«Экономика транспорта»
Протокол № 4 от « 20 » января 2016 г.

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»
(ФГБОУ ВПО ПГУПС)

Кафедра «Экономика транспорта»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ

Методические указания и задания к курсовому проекту

Санкт-Петербург
2016

3

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»
(ФГБОУ ВПО ПГУПС)

Кафедра «Экономика транспорта»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ

Методические указания и задания к курсовому проекту

Санкт-Петербург
2016

4

УДК 385
ББК 65.37
М34

М34 **Математическое** моделирование экономических процессов на железнодорожном транспорте : метод. указания и задания к курсовому проекту / В. Г. Карчик, Б. П. Немцов. – СПб. : ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2016. – 34 с.

Курсовой проект по дисциплине «Математические модели в экономике» состоит из трех частей. В первой части студентам предлагается решить транспортную задачу в матричной и сетевой формах и обобщённую транспортную задачу. Во второй части рассматриваются вопросы применения методов математической статистики в экономических расчетах. В третьей части предлагается решить общую задачу линейного программирования с помощью симплекс-метода и его модификаций. На основе полученных результатов предусматривается углубленный анализ производственных программ, в том числе эффективность и состояние использованных ресурсов, получаемой при этом прибыли. Для большинства задач предлагается алгоритм решения и рассматриваются конкретные численные примеры.

Методические указания и задания к выполнению курсового проекта предназначены для студентов бакалавриата, изучающих дисциплину «Математические модели в экономике» по направлению «Экономика», профилям «Экономика предприятий и организаций (транспорт)», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».

УДК 385
ББК 65.37

 5

6

1 Использование методов линейного программирования для целей оптимального распределения ресурсов

1.1 Оптимизация плана перевозок с использованием метода потенциалов

1. Составить допустимый план транспортной задачи, используя метод минимальной стоимости для построения базисного плана с ограничением пропускной способности.

2. Определить оптимальный план транспортной задачи, используя метод потенциалов. Построенный допустимый и оптимальный план должен удовлетворять условиям постановки транспортной задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m; \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n; \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{1.3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}. \tag{1.4}$$

Целевая функция задачи:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min F. \tag{1.5}$$

3. Рассчитать целевые функции каждого базисного плана перевозок.

4. Найти экономический эффект от оптимизации. Экономический эффект от оптимизации рассчитывается как разность между целевыми функциями базисного и оптимального планов.

5. Рассчитать матрицу показателей характеристик оптимального плана перевозок транспортной задачи. Характеристики для клеток матрицы рассчитываются по формуле:

$$D_{ij} = c_{ij} - (V_j - U_i). \tag{1.6}$$

6. Показать варианты альтернативных решений при одной и той же целевой функции или при минимальных от нее отклонениях.

7

Исходные данные приведены по вариантам в табл. 1.1–1.3. В табл. 1.1 приведена матрица стоимости перевозок для всех вариантов (c_{ij}), где в пяти клетках справа записаны величины d_{ij}, ограничивающие пропускную способность. В табл. 1.2 приведены данные по ресурсам поставщиков (a_i) – первая цифра номера варианта; в табл. 1.3 приведены данные по спросу потребителей (b_j) – вторая цифра номера варианта.

Таблица 1.1

10	20 **35**	75	160	90	80	70	60	a_1
10	30	45	40	25	65	30	10 **30**	a_2
15	10	10 **25**	20	25	80	20	85	a_3
45	8 **20**	35	30	110	40	75	20	a_4
80	40	90	105	150	50	30 **25**	90	a_5
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	

Таблица 1.2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
a_1	150	150	150	145	155	400	400	150	400	145
a_2	150	145	150	155	150	155	150	155	155	400
a_3	145	155	155	150	400	145	150	150	150	150
a_4	155	400	145	150	150	150	155	145	150	150
a_5	400	150	400	400	145	150	145	400	145	155

Таблица 1.3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
b_1	150	150	150	100	150	150	150	150	150	100
b_2	100	100	150	100	100	100	100	100	150	100
b_3	100	150	100	150	100	100	100	150	150	100
b_4	100	100	100	100	150	100	100	150	150	100
b_5	100	100	100	100	100	150	150	150	100	150
b_6	150	150	100	150	150	150	100	100	100	150
b_7	150	100	150	150	150	100	150	100	100	150
b_8	150	150	150	150	100	150	150	100	100	150

1.2 Оптимизация плана транспортной задачи с использованием метода потенциалов на сети

1. Оптимизировать план перевозок, используя метод потенциалов.

8

2. Рассчитать целевую функцию оптимального плана перевозок и установить эффект от оптимизации.

3. Для небазисных звеньев с ограничением провозной способности рассчитать прокатные оценки.

Исходные данные приведены на рис. 1.1, в табл. 1.4 и 1.5.

На рис. 1.1 показан полигон железной дороги, где указаны наименования поставщиков, потребителей и значения затрат на доставку. В табл. 1.4 приведены данные по ресурсам поставщиков (a_i) – первая цифра номера варианта. В табл. 1.5 приведены данные по потребителям (b_j) – вторая цифра номера варианта. По некоторым участкам введены ограничения провозной способности: AN = 20; CL = 20; CD = 40; EM = 50.

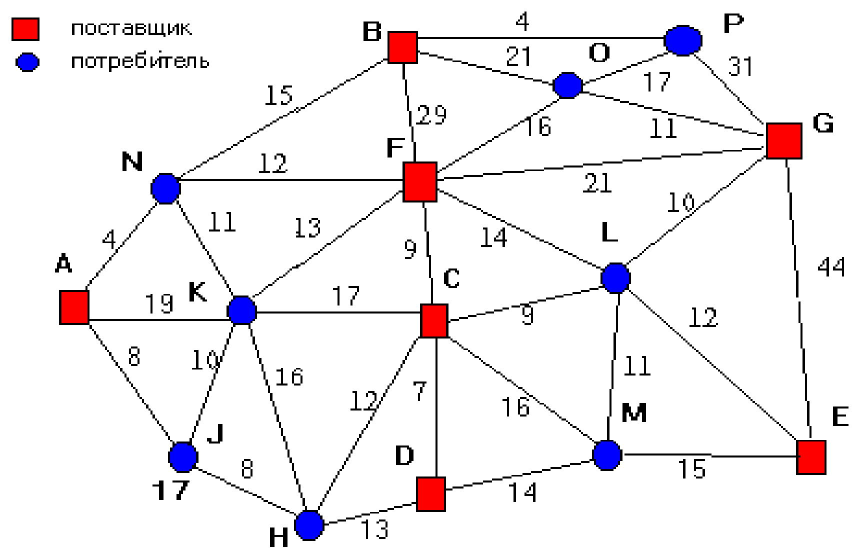

Рис. 1.1. Полигон железной дороги

Таблица 1.4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	95	60	70	70	56	94	80	60	70	19
B	70	90	80	90	90	70	70	80	138	43
C	80	146	90	138	60	60	19	70	90	80
D	90	70	146	60	80	90	43	19	60	90
E	80	80	60	80	70	80	90	138	43	70
F	19	23	31	43	121	17	138	90	19	60
G	66	31	23	19	23	89	60	43	80	138

Таблица 1.5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H	58	90	86	49	17	89	48	16	42	95

9

J	77	70	43	31	89	55	87	65	114	33
K	53	43	87	87	67	86	33	114	65	87
L	75	68	67	87	89	78	95	42	16	48
M	67	67	89	67	84	57	42	95	48	16
N	89	55	50	47	40	42	114	33	87	65
O	35	54	37	58	49	58	65	87	33	114
P	46	53	41	74	65	35	16	48	95	42

1.3 Обобщенная транспортная задача

Имеется возможность выпуска пяти видов продукции (j = 1, …, 5) на трех типах оборудования (i = 1, 2, 3).

1. Сформировать математическое описание задачи.
2. Построить первоначальное распределение.
3. Определить оптимальный план модифицированным методом потенциалов.
4. Выполнить анализ оптимального производственного плана, включая состав и объем выпуска продукции и состояние использованных ресурсов.
5. Проанализировать возможность изменения оптимального плана.

Исходные данные приведены в табл. 1.6–1.8. В табл. 1.6 приведены данные по ресурсам оборудования – первая цифра шифра варианта. В табл. 1.7 приведены данные по потребности выпуска продукции – вторая цифра шифра варианта. В табл. 1.8 приведены показатели производительности (Пр) машин и себестоимость (С/с) выпуска продукции – общие для всех вариантов.

Таблица 1.6

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$i = 1$	300	215	110	125	200	280	180	220	150	300
$i = 2$	100	120	125	285	100	120	280	180	250	200
$i = 3$	200	250	280	200	270	275	90	180	200	100

Таблица 1.7

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$j = 1$	350	150	150	100	350	100	350	150	100	200
$j = 2$	150	150	150	150	100	150	150	350	350	100
$j = 3$	150	100	150	150	150	150	100	150	150	300
$j = 4$	100	150	100	300	150	150	150	150	150	150
$j = 5$	150	300	300	150	150	300	150	100	150	200

Таблица 1.8

	$j = 1$		$j = 2$		$j = 3$		$j = 4$		$j = 5$	
	Пр	С/с	Пр	С/с	Пр	С/с	Пр	С/с	Пр	С/с

10

$i = 1$	2	10	2	20	2	15	2	20	1	40
$i = 2$	2	25	1	25	1	30	2	20	2	20
$i = 3$	2	20	1	20	2	25	1	20	2	35

Математическая модель обобщенной (распределительной) транспортной задачи состоит в следующем.

Найти

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min F \tag{1.7}$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_{ij} \cdot x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{1.9}$$

$$\forall x_{ij} \ge 0, \tag{1.10}$$

где i – индекс ресурсов;

j – индекс производимой продукции, работы, выполняемых перевозок;

k_{ij} – производительность ресурсов i при выполнении работы j;

x_{ij} – неизвестное, характеризующее объем ресурсов i, используемых при выполнении работы j;

c_{ij} – расходы, связанные с использованием единицы ресурсов i при выполнении работы j;

a_i – ресурсы с номером i;

b_j – потребность (работа) с номером j.

Алгоритм модифицированного метода потенциалов состоит из двух этапов. На первом этапе осуществляется построение допустимого плана.

Шаг 1. Построение базиса выполняется с учетом минимальной стоимости ресурса и максимальной производительности его использования. Для этого в каждом столбце отыскивается клетка с максимальным показателем производительности (k_{ij}) и минимумом стоимости (c_{ij}).

Можно, например, воспользоваться известными методами построения допустимого плана транспортной задачи Мюллера – Мербаха или другими, рассмотренными на первом занятии. Найденный оптимальный план не обязательно должен содержать в точности $n + m - 1$ элементов базиса. Если одна строка или более содержат резервы ресурсов, соответствующие строки получают потенциалы, равные нулю. Поэтому количество базисных элементов может быть и меньше, чем в обычной транспортной задаче

11

подобной размерности, но их достаточно для расстановки потенциалов. Если план оказывается вырожденным, он дополняется фиктивными базисными клетками с нулевыми значениями по собственному выбору. Сама базисная клетка, помимо показателей k_{ij} и c_{ij}, содержит еще два показателя: работы и затраченных ресурсов, необходимых для выполнения этой работы.

На втором этапе выполняются итеративные процедуры оптимизации базиса задачи.

Шаг 2. Выполняется расстановка потенциалов по базисным элементам матрицы по формулам:

$$U_i = V_j \cdot k_{ij} - c_{ij}, (i, j) \in B; \tag{1.11}$$

$$V_j = \frac{U_i + c_{ij}}{k_{ij}}, (i, j) \in B. \tag{1.12}$$

Расстановка потенциалов начинается с одной из строк, имеющих резерв неиспользованных ресурсов. Такой строке присваивается потенциал, равный нулю.

Шаг 3. Решение проверяется на оптимальность. Должны выполняться условия:

$$V_j \cdot k_{ij} - U_i \le c_{ij}, (i, j) \notin B; \tag{1.13}$$

$$U_i \ge 0. \tag{1.14}$$

Если условия не выполняются, переходят к шагу 4, иначе получаем оптимальный и допустимый план.

Шаг 4. Построение нового базиса. Отыскивается небазисная клетка с наибольшим нарушением условия оптимальности, относительно которой строится контур перераспределения элементов базиса.

Существуют два типа контуров. Первый – замкнутого вида, почти аналогичен контуру, построенному по методу потенциалов при решении обычных транспортных задач. Отличием этого контура служит цепочка (шлейф), которая соединяет элементы контура с базисной клеткой, размещенной в $n + 1$ столбце с резервами ресурсов. Другой контур – открытого типа, по аналогии с методом разрешающих слагаемых включает в себя два элемента $n + 1$ столбца с резервами ресурсов. После построения нового базиса с учетом расчетов по найденному контуру переходим к шагу 2.

Рассмотрим решение примера, приведенное в табл. 1.9–1.11. Пусть задана производственная программа по выпуску пяти видов изделий с

12

помощью трех видов ресурсов. Исходные данные по программе, ресурсам, производительности и затратам на единицу ресурсов приведены в табл. 1.9.

Таблица 1.9

Ресурсы	**350**	**150**	**150**	**100**	**150**	Небаланс	U_i
300	2 10	2 15	2 20	2 20	1 40		
100	2 25	1 30	1 25	2 20	2 20		
200	2 20	1 25	2 20	1 20	2 35		
V_j							

В табл. 1.10 приведен первый базисный план.

Таблица 1.10

Ресурсы	**350**	**150**	**150**	**100**	**150**	Небаланс	U_i
300	2 10 **350** **175**	2 15 **150** **75**	2 20 **100** **50**	2 20 *	1 40		0
100	2 25	1 30	1 25	2 20 **100** **50**	2 20 **100** **50**		15
200	2 20	1 25	2 20 **50** **25**	1 20	2 35 **50** **25**	**150**	0
V_j	5	7,5	10	17,5	17,5		

Шаг 1. В первом столбце отыскивается клетка с наилучшими показателями – наименьшей стоимостью – клетка (1,1), в которую вписывается максимальный объем работы, соответствующий потребности 350 ед. С учетом производительности (k_{11} = 2) расход соответствующих ресурсов составит: 350 : 2 = 175 ед. Остатки ресурсов составят: 300 – 175 = 125. Переходим ко второму столбцу. Здесь наиболее благоприятная клетка (1,2). Сюда назначается также максимальный объем работы, соответствующий потребности 150 ед., для чего необходимо еще 75 ед. ресурсов первого вида. Остаток последних теперь: 125 – 75 = 50. И так далее производится формирование базиса вплоть до клетки (3,5).

Шаг 2. Расстановка потенциалов начинается с третьей строки, имеющей резерв неиспользованных ресурсов. Такой строке присваивается потенциал $U_3 = 0$.

Шаг 3. Выполняется проверка решения на оптимальность. Поскольку у клетки (1,4) условия не выполняются, переходим к шагу 4.

13

Шаг 4. Построение контура для клетки (1,4). Первая цепь контура: (1,4) – (1,3) – (3,3) – (3,6). Вторая цепь контура: (1,4) – (2,4) – (2,5) – (3,5) – (3,6). Помечаем элементы первой цепочки: $(1,4)^{+}$– $(1,3)^{-}$– $(3,3)^{+}$– $(3,6)^{-}$, второй цепочки: $(1,4)^{+}$– $(2,4)^{-}$– $(2,5)^{+}$– $(3,5)^{-}$– $(3,6)^{+}$. Из показателей объемов работ клеток, помеченных знаком «–», отыскивается наименьшее значение – 50 – клетка (3,5). Эта величина заносится в клетку (1,4), и, начиная отсюда, выполняется распределение работ и ресурсов по остальным элементам контура с учетом знаков элементов и значений показателей k_{ij} соответствующих клеток: (1,4) – 50/25, (1,3) – 50/25, (3,3) – 100/50, (2,4) – 50/25, (2,5) – 150/75. Клетка (3,5) из базиса выбывает. Переходим к шагу 2. Новый план приведен в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Ресурсы	**350**	**150**	**150**	**100**	**150**	Небаланс	U_i
300	2 10 **<u>350</u>** **175**	2 15 **<u>150</u>** **75**	2 20 **<u>50</u>** **25**	2 20 **<u>50</u>** **25**	1 40		0
100	2 25	1 30	1 25	2 20 **<u>50</u>** **25**	2 20 **<u>150</u>** **75**		0
200	2 20	1 25	2 20 **<u>100</u>** **50**	1 20	2 35	**150**	0
V_j	5	7,5	10	10	10		

Шаги 2, 3. Получен оптимальный план.

2 Применение методов математической статистики в экономических расчетах

2.1 Расчет параметров регрессионных моделей. Проверка надежности найденных статистических показателей и вариаций изменений

Одной из главных задач повышения качества планирования является установление достоверных показателей на основе объективных количественных закономерностей, существующих в экономических процессах на транспорте.

Функциональная зависимость между независимой переменной X и зависимой Y состоит в том, что каждому значению X поставлено в однозначное соответствие определенное значение Y. В реальных условиях,

14

когда одновременно действует много факторов, изучаемая связь теряет свою функциональность. Возникает потребность в оценке таких зависимостей иными, статистическими методами.

Одним из признанных методов определения статистической связи являются расчеты на базе линейной модели регрессионного анализа.

Парную регрессионную модель можно представить в виде графика, где на оси абсцисс откладывается независимая переменная X, а на оси ординат – зависимая Y. Линейная регрессия описывается уравнением вида

$$Y_x = a + bx,$$

где Y_x – оцениваемая величина;

x – независимая переменная;

a и b – параметры выборки.

В основе расчета параметров лежит метод наименьших квадратов с использованием в качестве математической модели нормальной системы уравнений:

$$na + b\sum x = \sum y;\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy.$$

Параметры a и b отыскиваются в ходе соответствующих алгебраических преобразований и подстановки:

$$a = y^* - bx^*;\ b = \frac{(\sum xy - nx^* y^*)}{(\sum x^2 - nx^{*2})},$$

где x^*, y^* – средние значения параметров, n – число испытаний.

В табл. 2.1 показана последовательность действий при построении уравнения регрессии. В последних двух строках приведены значения сумм и средних показателей. В результате применения формул имеем: b = 2,056, a = 2,333 и уравнение регрессии: Y_x = 2,333 + 2,056x.

Задание 2.1. Установить статистическую зависимость между годовым объемом работы по грузообороту (млрд ткм), приняв его за независимую переменную (x), и фондоемкостью перевозок, приняв ее за зависимую переменную (Y). Составить линейную модель вида $Y_x = a + bx$. Исходные данные по вариантам приведены в табл. 2.2 (грузооборот, млрд ткм (x)) и 2.3 (показатели фондоемкости перевозок (y), руб. на 1 ткм).

Таблица 2.1

n	x	y	xy	x^2	Y_x	$y - Y_x$	$(y - Y_x)^2$	y^2	$(y - y^*)$	$(y - y^*)^2$
1	5	12	60	25	12,61	–0,611	0,373	144	3,5	12,25

15

n	x	y	xy	x^2	Y_x	$y - Y_x$	$(y - Y_x)^2$	y^2	$(y - y^*)$	$(y - y^*)^2$
2	4	11	44	16	10,56	0,444	0,197	121	2,5	6,25
3	3	9	27	9	8,5	0,5	0,25	81	0,5	0,25
4	2	8	16	4	6,444	1,555	2,419	64	–0,5	0,25
5	1	4	4	1	4,389	–0,388	0,151	16	–4,5	20,25
6	3	10	30	9	8,5	1,5	2,25	100	1,5	2,25
7	2	6	12	4	6,444	–0,444	0,199	36	–2,5	6,25
8	2	7	14	4	6,444	0,555	0,308	49	–1,5	2,25
9	2	5	10	4	6,444	–1,444	2,089	25	–3,5	12,25
10	4	10	40	16	10,56	–0,555	0,308	100	1,5	2,25
11	5	13	65	25	12,61	0,388	0,154	169	4,5	20,25
12	3	7	21	9	8,5	–1,5	2,25	49	–1,5	2,25
$\sum$	36	102	343	126			10,944	954		87
$x^* = 3$		$y^* = 8,5$								

Таблица 2.2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
10	9	11	13	14	13	13	13	11	13
11	11	11	11	11	11	9	8	9	10
9	9	9	9	9	8	8	8	8	9
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
6	6	6	6	6	6	6	6	7	6
7	7	7	7	7	7	7	7	6	7
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
10	10	10	10	10	10	10	10	13	10
13	13	13	13	13	13	13	13	10	13
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

Таблица 2.3

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
80	100	100	100	100	100	100	100	100	100
80	100	80	80	80	80	80	80	80	80
60	60	80	60	60	60	60	60	60	60
40	40	40	60	40	40	40	40	40	40
20	20	20	20	40	20	20	20	20	40
60	60	60	60	60	20	60	60	60	60
40	40	40	40	40	40	60	40	40	40
40	40	40	40	40	40	40	60	40	60
40	40	40	40	40	40	40	40	20	40
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60

Задание 2.2. Определить достоверность найденного уравнения линейной регрессионной модели, используя критерий Фишера.

 16

Для использования критерия Фишера (F) устанавливается отношение (η) полной дисперсии (s_y^2) к остаточной ($s_{y,x}^2$):

$$\eta = \frac{s_y^2}{s_{y,x}^2};$$

$$s_y^2 = \frac{\sum (y - y^*)^2}{n - 1};$$

$$s_{y,x}^2 = \frac{\sum (y - Y_x)^2}{n - m - 1},$$

где m – число факторов в модели ($m = 1$).

Из расчетов табл. 2.1 имеем:

$$\sum(y - Y_x)^2 = 10{,}94;$$

$$\sum(y - y^*)^2 = 87;$$

$$s_{y,x}^2 = 10{,}94 / (12 - 2) = 1{,}094;$$

$$s_y^2 = 87 / (12 - 1) = 7{,}909.$$

Найдем теперь отношение $\eta = 7{,}909 / 1{,}094 = 7{,}23$.

По соответствующей статистической таблице F-распределения (приложение, табл. П1) определим, что с доверительной вероятностью, например в 95 случаях из 100, мы имеем удовлетворительный результат, так как $f(0{,}95) = 2{,}94$ и меньше значения η. Полученный результат позволит нам использовать рассчитанное уравнение регрессии для различных целей, включая прогнозирование.

2.2 Расчет параметров парной корреляции

В основе расчета коэффициента корреляции и параметров оценки его надежности лежит метод наименьших квадратов с использованием в качестве математической модели нормальной системы уравнений линейной регрессии. Найденный коэффициент корреляции показывает уровень тесноты связи между исследуемыми факторами. Чем выше значение коэффициента корреляции, тем теснее исследуемая связь. Расчет линейного коэффициента корреляции выполняется по формуле:

17

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}.$$

Величина линейного коэффициента корреляции изменяется в диапазоне от –1 до +1. По данным табл. 2.1 находим показатели, необходимые для расчета r. Подставляя их значения в формулу, имеем: r = 0,935.

Задание 2.3. Найти значение коэффициента корреляции для проверки статистической зависимости между годовым объемом работы по грузообороту (x) и фондоемкостью перевозок (y) по данным своего варианта.

Задание 2.4. Определить значимость найденного в задании 2.3 коэффициента корреляции. Сделать вывод о доверительности найденного значения, используя таблицу нижних границ значимости коэффициента корреляции с уровнем значимости 0,95. Вывод о значимости найденного значения линейного коэффициента корреляции в 95 случаях из 100 принимается при условии, что оно больше соответствующей нижней границы. В табл. П2 приложения приведены значения нижних границ коэффициента корреляции.

2.3 Выравнивание рядов распределений с проверкой гипотезы нормальности по критерию Пирсона на базе эмпирического ряда величин себестоимости железнодорожной перевозки

Задание 2.5. Требуется подтвердить гипотезу нормальности распределения эмпирического ряда величин себестоимости пропуска транзитных вагонов по участкам железных дорог и найти теоретическое нормальное распределение этих величин. Для этого необходимо установить величину расхождения между указанными распределениями, используя критерий Пирсона. Исходные данные для расчетов приведены в табл. 2.4 (интервалы распределения эмпирического ряда величин себестоимости пропуска транзитных вагонов по участкам железных дорог (варианты – первое значение шифра)), табл. 2.5 (распределение эмпирического ряда величин себестоимости пропуска транзитных вагонов по участкам железных дорог, тыс. руб./в-км (варианты – второе значение шифра)) и табл. 2.6 (необходимые формы).

Среднее значение ряда рассчитывается по формуле:

$$x^* = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = 364/210 = 1{,}73.$$

19

Таблица 2.4

1		2		3		4		5		6		7		8		9		0	
0,56	0,76	0,58	0,78	0,6	0,8	0,62	0,82	0,64	0,84	0,66	0,86	0,68	0,88	0,7	0,9	0,72	0,92	0,74	0,94
0,76	0,96	0,78	0,98	0,8	1	0,82	1,02	0,84	1,04	0,86	1,06	0,88	1,08	0,9	1,1	0,92	1,12	0,94	1,14
0,96	1,16	0,98	1,18	1	1,2	1,02	1,22	1,04	1,24	1,06	1,26	1,08	1,28	1,1	1,3	1,12	1,32	1,14	1,34
1,16	1,36	1,18	1,38	1,2	1,4	1,22	1,42	1,24	1,44	1,26	1,46	1,28	1,48	1,3	1,5	1,32	1,52	1,34	1,54
1,36	1,56	1,38	1,58	1,4	1,6	1,42	1,62	1,44	1,64	1,46	1,66	1,48	1,68	1,5	1,7	1,52	1,72	1,54	1,74
1,56	1,76	1,58	1,78	1,6	1,8	1,62	1,82	1,64	1,84	1,66	1,86	1,68	1,88	1,7	1,9	1,72	1,92	1,74	1,94
1,76	1,96	1,78	1,98	1,8	2	1,82	2,02	1,84	2,04	1,86	2,06	1,88	2,08	1,9	2,1	1,92	2,12	1,94	2,14
1,96	2,16	1,98	2,18	2	2,2	2,02	2,22	2,04	2,24	2,06	2,26	2,08	2,28	2,1	2,3	2,12	2,32	2,14	2,34
2,16	2,36	2,18	2,38	2,2	2,4	2,22	2,42	2,24	2,44	2,26	2,46	2,28	2,48	2,3	2,5	2,32	2,52	2,34	2,54
2,36	2,56	2,38	2,58	2,4	2,6	2,42	2,62	2,44	2,64	2,46	2,66	2,48	2,68	2,5	2,7	2,52	2,72	2,54	2,74
2,56	2,76	2,58	2,78	2,6	2,8	2,62	2,82	2,64	2,84	2,66	2,86	2,68	2,88	2,7	2,9	2,72	2,92	2,74	2,94

Таблица 2.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	3	4	2	4	3	2	4	3	2
7	8	6	7	6	8	7	6	8	5
14	12	10	14	10	12	14	10	12	12
20	21	18	20	18	21	20	18	21	18
30	29	30	30	30	29	30	30	29	24
42	40	40	40	40	40	40	42	42	38
50	48	36	48	48	36	36	50	50	29
28	28	28	28	28	28	28	28	28	21
22	22	24	22	22	24	24	22	22	17
12	10	10	10	10	10	10	12	12	9
6	4	2	4	4	2	2	6	6	2

1516

Таблица 2.6

X_1	X_2	n_i	X_i	$X_i n_i$	$X_i - X^*$	$(X_i - X^*)^2$	$(X_i - X^*)^2\ n_i$	t_i	$\varphi(t_i)$	f_i	$f_i - n_i$	$(f_i - n_i)^2$	$(f_i - n_i)^2/f_i$
0,6	0,8	2	0,7	1,4	–1,0333	1,0678	2,1356	–2,5	0,0163	1,68	–0,321	0,1032	0,0615
0,8	1	5	0,9	4,5	–0,8333	0,6944	3,4722	–2	0,0498	5,13	0,1287	0,0166	0,0032
1	1,2	10	1,1	11	–0,6333	0,4011	4,0111	–1,6	0,12	12,4	2,3584	5,5620	0,4501
1,2	1,4	20	1,3	26	–0,4333	0,1878	3,7556	–1,1	0,2275	23,4	3,429	11,7610	0,5020
1,4	1,6	40	1,5	60	–0,2333	0,0544	2,1778	–0,6	0,3391	34,9	–5,077	25,778	0,7382
1,6	1,8	60	1,7	102	–0,0333	0,0011	0,0667	–0,1	0,3977	41	–19,04	362,607	8,8532
1,8	2	23	1,9	43,7	0,1667	0,0278	0,6389	0,41	0,3683	37,9	14,92	222,902	5,8767
2	2,2	20	2,1	42	0,3667	0,1344	2,6889	0,9	0,2685	27,7	7,65	58,551	2,1174
2,2	2,4	14	2,3	32,2	0,5667	0,3211	4,4956	1,39	0,1539	15,8	1,84	3,4211	0,2158
2,4	2,6	10	2,5	25	0,7667	0,5878	5,8778	1,88	0,0694	7,15	–2,857	8,1381	1,1386
2,6	2,8	6	2,7	16,2	0,9667	0,9344	5,6067	2,37	0,0241	2,48	–3,51	12,376	4,9866
		210		364			34,926	$y = 103$		209,5			$\chi^2 = 24,94$

21

Среднеквадратичное отклонение рассчитывается по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x^*)^2 n_i}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{34,926}{210}} = 0,40782.$$

Нормированное отклонение рассчитывается по формуле:

$$t_i = \frac{x_i - x^*}{\sigma}.$$

Теоретическое нормальное распределение нормируется через данный показатель путем умножения значения функции плотности вероятности $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

на значение величины эмпирического нормированного отклонения:

$$y = \frac{\sum n_i \cdot \Delta}{\sigma} = \frac{210 \cdot 0,2}{0,4078} = 103; \quad f_i = \varphi(t_i) \cdot y.$$

Данные по функции плотности вероятности $\varphi(t)$ приведены в приложении, табл. П3. Сумма найденных теоретических частот $\sum f_i$ сравнивается с суммой частот эмпирического распределения $\sum n_i$. Если эти суммы различаются незначительно, то предполагают, что расхождения фактического распределения с теоретической нормальной кривой распределения носят случайный характер, и гипотеза соответствия экспериментального распределения теоретическому принимается. В противном случае гипотеза соответствия отвергается. В практике статистических расчетов для оценки правомерности гипотезы соответствия фактического распределения нормальному принят критерий «χ-квадрат», иначе говоря, критерий Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - n_i)^2}{f_i}.$$

После определения величины критерия Пирсона рассчитывается число степеней свободы: $r = k - 3$, где k – число интервалов в фактическом распределении, длина каждого из которых Δ. В нашем примере: $r = k - 3 = 11 - 3 = = 8$. При заданном уровне значимости 5 %, предусматривающем 5%-ю

17

ошибку, и количестве степеней свободы, равном у нас 8, определяется табличная величина критерия Пирсона χ^2 = 15,5, приведенная в табл. 2.7. Если найденное значение в расчетах χ-квадрата меньше или равно табличному, гипотеза о соответствии эмпирического распределения теоретическому принимается, если нет, то отвергается, как в нашем примере: $\chi^2 = 24{,}94 > 15{,}5$.

Таблица 2.7

Число степеней свободы	5%-е критические значения	Число степеней свободы	5%-е критические значения	Число степеней свободы	5%-е критические значения
1	3,8	11	19,7	21	32,7
2	6,0	12	21,0	22	33,9
3	7,8	13	22,4	23	35,2
4	9,5	14	23,7	24	36,4
5	11,1	15	25,0	25	37,7
6	12,6	16	26,3	26	38,9
7	14,1	17	27,6	27	40,1
8	15,5	18	28,9	28	41,3
9	16,9	19	30,1	29	42,6
10	18,3	20	31,4	30	43,8

2.4 Прогнозирование экономических показателей методом простого экспоненциального сглаживания

Задание 2.6. Рассчитать заданным методом прогноз для локомотивного депо на 11-й год при параметрах сглаживания α = 0,3 и α = 0,5. Данные вариантов по динамике изменения величин экономических показателей работы локомотивного депо приведены в табл. 2.8–2.10.

Взвешенная скользящая средняя с экспоненциально распределенным весом характеризует в основном значение процесса на конце интервала сглаживания. Это свойство используется для прогнозирования.

Формулы для расчета величины прогнозирования следующие:

$$Q_1 = y_1;$$

$$Q_i = \alpha y_i + (1 - \alpha)Q_{i-1}, \; i = 2, \ldots, 10;$$

$$Q_{11} = \alpha y_{10} + (1 - \alpha)Q_{10}.$$

18

Таблица 2.8

Год	Производительность локомотива, тыс. ткм брутто								Количество тяжеловесных поездов							
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
1	1400	1420	1440	1460	1480	1500	1520	1540	5120	5110	5100	5090	5080	5070	5060	5050
2	1450	1510	1500	1520	1500	1550	1580	1590	5100	5120	5140	5100	5180	5200	5220	5240
3	1500	1680	1560	1580	1560	1650	1600	1640	5050	5100	5180	5230	5240	5330	5380	5430
4	1550	1780	1600	1640	1540	1650	1700	1780	4830	5140	5220	5300	5260	5420	5540	5620
5	1600	1950	1680	1700	1560	1700	1760	1740	5100	5150	5260	5400	5480	5590	5710	5810
6	1650	1995	1700	1760	1580	1750	1800	1790	5300	5160	5240	5440	5600	5790	5740	5890
7	1700	2000	1800	1800	1630	1800	1880	1870	6600	5170	5340	5500	5680	5800	5730	6190
8	1700	2020	1900	1880	1670	1900	1980	1890	6720	5200	5440	5580	5670	5980	5700	6210
9	1800	2020	1920	1940	1730	1900	2090	1990	6800	5220	5420	5650	5700	6110	6100	6220
10	1900	2040	1980	2040	1810	2100	2100	2100	7000	5200	5400	5600	5710	6000	5990	6210

Таблица 2.9

Год	Средняя заработная плата, тыс. руб.								Контингент, чел.							
	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8
1	51,6	51,3	51,0	50,7	50,4	50,1	49,8	49,5	604	604	611	612	613	614	615	616
2	51,9	51,9	51,6	51,6	51,0	51,6	51,0	51,3	614	620	626	632	638	644	650	656
3	52,8	53,4	52,2	52,5	52,2	52,5	51,6	51,9	621	621	631	621	630	674	630	661
4	54,0	54,0	52,8	53,4	52,2	53,4	52,2	53,4	670	631	636	631	636	704	610	666
5	55,5	54,0	53,4	54,0	53,4	54,0	52,8	54,0	690	661	641	661	641	734	590	671
6	55,8	55,8	54,0	55,2	53,4	54,0	53,4	54,0	720	690	646	690	646	764	57	676

															0	
7	57,6	56,4	54,0	55,2	54,0	55,2	54,0	55,8	750	750	651	750	651	794	550	681
8	59,7	48,0	54,6	55,2	54,6	55,2	54,0	56,4	756	756	656	756	656	780	530	686
9	64,5	60,6	55,8	57,9	55,8	58,5	54,6	48,0	720	700	661	700	661	785	510	685
10	64,8	60,6	59,7	57,9	55,8	57,9	55,8	60,6	725	725	660	700	660	783	510	680

Таблица 2.10

Год	Производительность труда локомотивных бригад, млн ткм брутто								Себестоимость, руб. ткм							
	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8
1	21,8	21,6	21,4	21,2	21	20,8	20,6	20,4	3,02	3,08	3,14	3,2	3,26	3,32	3,38	3,44
2	24,8	23,1	22,1	21,1	20,1	19,1	18,1	17,1	3,09	3,12	3,15	3,18	3,21	3,24	3,27	3,3
3	27,1	24,6	22,8	26,1	22,8	22,8	20,1	15,1	3,21	3,31	3,41	3,51	3,16	3,71	3,81	3,91
4	38,9	26,1	23,5	25,8	23,5	23,5	22,1	19,1	2,98	3,38	3,47	3,45	3,11	3,79	3,47	3,65
5	39,2	27,6	24,2	25,6	24,2	24,2	26,1	19,5	3,19	3,41	3,53	3,39	3,06	3,87	3,53	3,71
6	40,1	29,1	25,8	26,3	25,8	25,8	25,3	19,9	3,25	3,52	3,59	3,33	3,01	3,95	3,59	3,77
7	41,5	30,6	25,6	27,9	25,6	25,6	24,8	20,5	3,16	3,59	3,65	3,27	2,96	4,03	3,65	3,81

8	44,7	32,1	26,3	29,1	30,6	26,3	26,3	20,7	3,06	3,66	3,71	3,21	2,91	4,11	3,71	4,03
9	44,8	33,6	27,9	30,6	32,1	30,6	28,1	21,1	3,06	3,73	3,77	3,15	2,86	4,49	3,77	4,11
10	44,6	35,1	27,7	32,1	33,6	32,1	27,9	22,5	3,11	3,84	3,83	3,09	2,81	4,27	3,81	4,49

21

3 Общая задача линейного программирования

3.1 Решение задачи симплекс-методом

Имеется возможность выпуска четырех видов продукции (N1, N2, N3, N4) на пяти типах машин (A, B, C, D, E).

1. Сформировать математическое описание задачи.
2. Построить каноническую форму.
3. Определить оптимальный план.
4. Выполнить анализ оптимального производственного плана, включая состав и объем выпуска продукции, получаемую при этом прибыль, эффективность и состояние использованных ресурсов.
5. Проанализировать возможность изменения оптимального плана, привлекая для этого двойственные оценки.

Исходные данные приведены в табл. 3.1–3.3.

Каждый студент получает свой вариант расчета – двухзначный шифр. Выбор варианта определяется порядковым номером фамилии студента в журнале группы.

В табл. 3.1 приведены данные по коэффициентам «затраты – выпуск», общие для всех вариантов. В табл. 3.2 приведены данные по коэффициентам целевой функции по вариантам с первой цифрой шифра. В табл. 3.3 приведены данные по ресурсам по вариантам со второй цифрой шифра.

Таблица 3.1

A	0	2	4	1
B	2	2	0	2
C	2	2	2	0
D	1	2	2	1
E	2	0	2	1

Таблица 3.2

Шифр	Прибыль на единицу			
1	12	9	10	11
2	10	8	9	12
3	12	6	8	16
4	4	7	6	12
5	10	6	4	5
6	16	4	6	10
7	4	16	10	6
8	4	10	6	16
9	10	6	16	4
0	8	9	4	7

21

Таблица 3.3

Ресурсы	Варианты по шифру									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	800	700	740	770	760	760	740	800	770	760
B	700	800	700	740	770	770	760	760	800	770
C	740	740	800	700	740	740	770	770	760	800
D	770	770	770	800	700	700	800	740	700	740
E	760	760	760	760	800	800	700	700	740	700

Алгоритм симплекс-метода состоит из двух этапов.

На первом этапе осуществляется построение допустимого плана.

Шаг 1. Построение канонической формы. Для каждого ограничения вводим $x_{j+4} \geq 0$ – дополнительную переменную.

Шаг 2. Строится базис допустимого плана относительно этих переменных.

Шаг 3. Рассчитываются симплекс-множители и показатели $z_j = \sum_i c_i a_{ij}$ строки относительных показателей (индексной строки) $z_j - c_j$.

На втором этапе выполняются итеративные процедуры оптимизации базиса задачи.

Шаг 4. Выполняется проверка решения на оптимальность. Для задач на максимум целевой функции должно выполняться условие: $z_j - c_j \geq 0$. Если условие оптимальности не выполняется, переходим к шагу 5, иначе получен оптимальный и допустимый план.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца. Из показателей индексной строки выбирается значение с наибольшим отклонением от условия оптимальности. Соответствующая переменная на следующей итерации входит в базис задачи.

Шаг 6. Выбор ключевой строки. Находится минимальное отношение показателей столбцов x_i и a_{ij} при условии, что $a_{ij} > 0$.

Шаг 7. Выполняются симплекс-преобразования:

$$a_{ij}^* = a_{ij} - \frac{a_{i_k j} a_{ij_t}}{a_{i_k j_t}}, \qquad a_{i_k j}^* = \frac{a_{i_k j}}{a_{i_k j_t}},$$

где a_{ij}^* – значение элемента в новом базисе;

$a_{i_k j}^*$ – значение элемента ключевой строки в новом базисе;

a_{ij} – значение элемента в текущем базисе;

$a_{i_k j}$ – значение элемента ключевой строки в текущем базисе;

a_{ij_t} – значение элемента ключевого столбца в текущем базисе;

$a_{i_k j_t}$ – значение ключевого элемента в текущем базисе.

Пример 3.1. Вначале заполняется таблица 3.4. Сюда занесем значения коэффициентов функции цели, наименования неизвестных, массив значений коэффициентов «затраты – выпуск», формирования столбцов c_i, p_i, x_i, составляющих базис плана, полученный при использовании канонической формы с переменными x_5, x_6, x_7.

Таблица 3.4

c_i	p_i	x^i	3	4	3	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	12	2	4	0	8	1	0	0
0	x_6	8	7	2	2	6	0	1	0
0	x_7	48	5	8	4	3	0	0	1
$z_j - c_j$		0	–3	–4	–3	–1	0	0	0

Шаги 1, 2, 3, 4.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца – (x_2). Переменная x_2 входит в базис.

Шаг 6. Выбор ключевой строки: min {12/4; 8/2; 48/8} = 12/4. Переменная x_5 исключается из базиса.

Шаг 7. Симплексные преобразования. Переходим к табл. 3.5.

Таблица 3.5

c_i	p_i	x^i	3	4	3	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
4	x_2	3	1/2	1	0	2	1/4	0	0
0	x_6	2	6	0	2	2	–1/2	1	0
0	x_7	24	1	0	4	–13	–2	0	1
$z_j - c_j$		12	–1	0	–3	7	1	0	0

Шаг 4.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца – (x_3). Переменная x_3 входит в базис.

Шаг 6. Выбор ключевой строки: min {2/2; 24/4} = 2/2. Переменная x_6 исключается из базиса.

Шаг 7. Симплексные преобразования. Переходим к табл. 3.6.

Таблица 3.6

c_i	p_i	x^i	3	4	3	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
4	x_2	3	1/2	1	0	2	1/4	0	0
3	x_3	1	3	0	1	1	–1/4	1/2	0
0	x_7	20	–11	0	0	–17	–1	–2	1
$z_j - c_j$		$\boxed{15}$	8	0	0	10	1/4	3/2	0

Шаг 4. Проверка условия оптимальности. План оптимален, поскольку все показатели индексной строки неотрицательны.

3.2 Изучение модифицированного симплекс-метода

Имеется возможность выпуска четырех видов продукции (N1, N2, N3, N4) на пяти типах машин (A, B, C, D, E).

1. Сформировать математическое описание задачи.
2. Построить каноническую форму и получить допустимое решение.
3. Определить оптимальный план.
4. Выполнить анализ оптимального производственного плана, включая состав и объем выпуска продукции, получаемую при этом прибыль, эффективность и состояние использованных ресурсов.
5. Проанализировать возможность изменения оптимального плана, привлекая для этого двойственные оценки и другие показатели индексной строки.

Исходные данные приведены в табл. 3.1–3.3. Каждый студент получает свой вариант расчета – двухзначный шифр.

В табл. 3.1 приведены данные по коэффициентам «затраты – выпуск», общие для всех вариантов. В табл. 3.2 приведены данные по коэффициентам целевой функции по вариантам с первой цифрой шифра. В табл. 3.3 приведены данные по ресурсам по вариантам со второй цифрой шифра.

Пример 3.2. Вначале заполняется таблица 3.7. Сюда занесем значения коэффициентов функции цели, наименования неизвестных, массив значений коэффициентов «затраты – выпуск».

Таблица 3.7

N3	N2	N1	3	4	3	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1/4	1	0	2	4	0	8	1	0	0
3/2	0	0	7	2	2	6	0	1	0
0	0	0	5	8	4	3	0	0	1
			–3	–4	–3	–1	0	0	0
			–1	0	–3	7	1	0	0
			8	0	0	10	1/4	3/2	0

24

Заполнение таблицы 3.8 начнем с формирования столбцов c_i, p_i, x_i, составляющих базис плана, полученный при использовании канонической формы с переменными x_5, x_6, x_7.

Шаг 1. Формирование показателей корректирующей строки и расчет F.

Шаг 2. Переходим к табл. 3.7 – заполнение столбца N1.

Шаг 3. Расчет показателей первой индексной строки.

Шаг 4. Проверка условия оптимальности.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца – переходим к табл. 3.8 (x_2).

Шаг 6. Формирование показателей исходной строки.

Шаг 7. Формирование показателей ключевого столбца в табл. 3.8.

Шаг 8. Выбор ключевой строки: min {12/4; 8/2; 48/8} = 12/4. Переменная x_2 вводится в базис, переменная x_5 исключается из базиса. Переходим к табл. 3.9.

Таблица 3.8

c_i	p_i	x_i	4	2	8	
0	x_5	12	1	0	0	4
0	x_6	8	0	1	0	2
0	x_7	48	0	0	1	8
		0	0	0	0	

Шаг 9. Симплексные преобразования.

Шаг 1. Формирование показателей корректирующей строки табл. 3.9 и расчет F.

Шаг 2. Переходим к табл. 3.7 – заполнение столбца N2.

Шаг 3. Расчет показателей второй индексной строки.

Шаг 4. Проверка условия оптимальности.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца – переходим к табл. 3.9 (x_3).

Шаг 6. Формирование показателей исходной строки табл. 3.9.

Шаг 7. Формирование показателей ключевого столбца в табл. 3.9.

Шаг 8. Выбор ключевой строки. Переменная x_3 вводится в базис, переменная x_6 исключается из базиса.

Переходим к табл. 3.10.

Таблица 3.9

c_i	p_i	x_i	0	2	4	
4	x_2	3	1/4	0	0	0
0	x_6	2	–1/2	1	0	2
0	x_7	24	–2	0	1	4
		12	1	0	0	

Шаг 9. Симплексные преобразования.

Шаг 1. Формирование показателей корректирующей строки табл. 3.10 и расчет F.

Шаг 2. Переходим к табл. 3.7 – заполнение столбца N3.

Шаг 3. Расчет показателей третьей индексной строки.

Шаг 4. Проверка условия оптимальности. План оптимален.

Таблица 3.10

c_i	p_i	x_i			
4	x_2	3	1/4	0	0
3	x_3	1	–1/4	1/2	0
0	x_7	20	–1	–2	1
		15	1/4	3/2	0

3.3 Решение задачи симплекс-методом с использованием искусственного базиса

1. Необходимо составить оптимальную диету, закупив три вида продуктов В1, В2, В3 с заданными ценами С1, С2, С3. Составленная диета должна удовлетворять по объему требуемых питательных веществ на уровне не ниже заданного и быть минимальной по затратам.

2. Сформировать математическое описание задачи.

3. Построить каноническую форму, искусственный базис и получить допустимое решение.

4. Определить оптимальный план.

5. Выполнить анализ оптимального плана, включая состав и объем закупленных продуктов, расходы, количество и эффективность питательных веществ.

6. Проанализировать возможность изменения оптимального плана, привлекая для этого двойственные оценки и другие показатели индексной строки.

Исходные данные приведены в табл. 3.11–3.13.

Каждый студент получает свой вариант расчета – двухзначный шифр. Выбор варианта определяется порядковым номером фамилии студента в журнале группы.

В табл. 3.11 приведены данные по количеству питательных веществ в каждом продукте – общие для всех вариантов. В табл. 3.12 приведены данные по коэффициентам целевой функции по вариантам с первой цифрой шифра. В табл. 3.13 приведены данные по ресурсам по вариантам со второй цифрой шифра.

Таблица 3.11 *Таблица 3.12*

26

	B1	B2	B3
A1	0	2	1
A2	2	4	0
A3	10	4	2

Шифр	Цена за единицу		
1	5	4	2
2	5	2	4
3	4	2	5
4	4	5	2
5	2	4	5
6	2	5	4
7	3	7	6
8	4	3	5
9	7	3	4
0	4	5	7

Таблица 3.13

	Варианты по шифру									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A1	25	10	10	25	50	50	25	10	30	15
A2	10	25	50	50	10	25	25	30	15	20
A3	50	50	25	10	25	10	10	25	10	25

Алгоритм симплекс-метода в задаче с искусственным базисом также состоит из двух этапов. На первом осуществляется построение канонической формы – допустимого плана с использованием искусственного базиса. При этом дополнительные неизвестные имеют знак «–», а их коэффициенты в целевой функции равны нулю, искусственные переменные имеют знак «+», а их коэффициенты в целевой функции равны достаточно большому числу М. На втором этапе выполняется обычная оптимизационная процедура.

Шаг 1. Построение канонической формы. Для каждого ограничения вводим

$x_{j+3} \geq 0$ – дополнительную переменную;

$x_{j+6} \geq 0$ – переменную искусственного базиса.

Шаг 2. Строится базис допустимого плана относительно переменных искусственного базиса.

Шаг 3. Рассчитываются симплекс-множители и показатели

$$z_j = \sum_i c_i a_{ij}$$

строки относительных показателей (индексной строки):

$$z_j - c_j .$$

27

Шаг 4. Выполняется проверка решения на оптимальность. Для задач на минимум целевой функции должно выполняться условие:

$$z_j - c_j \leq 0.$$

Если условие оптимальности не выполняется, переходим к шагу 5, иначе получен оптимальный и допустимый план.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца. Из показателей индексной строки выбирается значение с наибольшим отклонением от условия оптимальности. Соответствующая переменная на следующей итерации входит в базис задачи.

Шаг 6. Выбор ключевой строки. Находится минимальное отношение показателей столбцов x_i и a_{ij} при условии, что $a_{ij} > 0$.

Шаг 7. Выполняются симплекс-преобразования.

Пример 3.3. Вначале заполняется таблица 3.14. Сюда занесем значения коэффициентов функции цели, наименования неизвестных, массив значений коэффициентов «затраты – выпуск», элементы столбцов c_i, p_i, x_i – составляющих базис плана, полученный при использовании канонической формы с переменными x_7, x_8, x_9.

Таблица 3.14

			5	4	2	0	0	0	M	M	M
c_i	p_i	x_i	$\boldsymbol{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
M	x_7	20	**0**	2	1	–1	0	0	1	0	0
M	$\boldsymbol{x_8}$	**8**	$\boxed{\mathbf{2}}$	**4**	**0**	**0**	**–1**	**0**	**0**	**1**	**0**
M	x_9	60	**10**	4	2	0	0	–1	0	0	1
		88M	**12M**	10M	3M	–M	–M	–M	0	0	0
			–5	–4	–2	0	0	0	0	0	0

Шаги 1, 2, 3, 4.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца – (x_1). Переменная x_1 входит в базис.

Шаг 6. Выбор ключевой строки: min {8/2; 60/10} = 8/2. Переменная x_8 исключается из базиса.

Шаг 7. Симплексные преобразования. Переходим к табл. 3.15.

Таблица 3.15

			5	4	2	0	**0**	0	M	M	M
c_i	p_i	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{x_5}$	x_6	x_7	x_8	x_9
M	x_7	20	0	2	1	–1	**0**	0	1	0	0
5	x_1	4	1	2	0	0	**–0,5**	0	0	0,5	0
M	$\boldsymbol{x_9}$	**20**	**0**	**–16**	**2**	**0**	$\boxed{\mathbf{5}}$	**–1**	**0**	**–5**	**1**
		40M	0	–14M	3M	–M	**5M**	–M	0	–6M	0
		+20	0	6	–2	0	**–2,5**	0	0	2,5	0

28

Шаг 4.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца – (x_5). Переменная x_5 входит в базис.

Шаг 6. Выбор ключевой строки: min {20/5} = 20/5. Переменная x_9 исключается из базиса.

Шаг 7. Симплексные преобразования. Переходим к табл. 3.16.

Таблица 3.16

			5	**4**	2	0	0	0	M	M	M
c_i	p_i	x_i	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
M	$\boldsymbol{x_7}$	**20**	**0**	$\boxed{\mathbf{2}}$	**1**	**–1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
5	x_1	6	1	**0,4**	0,2	0	0	–0,1	0	0	0,1
0	x_5	4	0	**–3,2**	0,4	0	1	–0,2	0	–1	0,2
		20M	0	**2M**	M	–M	0	0	0	–M	–M
		+30	0	**–2**	–1	0	0	–0,5	0	0	0,5

Шаг 4.

Шаг 5. Выбор ключевого столбца – (x_2). Переменная x_2 входит в базис.

Шаг 6. Выбор ключевой строки: min {20/2; 6/0,4} = 20/2. Переменная x_7 исключается из базиса.

Шаг 7. Симплексные преобразования. Переходим к табл. 3.17.

Таблица 3.17

			5	4	2	0	0	0	M	M	M
c_i	p_i	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
4	x_2	10	0	1	0,5	–0,5	0	0	0,5	0	0
5	x_1	2	1	0	0	0,2	0	–0,1	–0,2	0	0,1
0	x_5	36	0	0	2	–1,6	1	–0,2	1,6	–1	0,2
		50	0	0	0	–1	0	–0,5	1-M	0-M	0,5-M

Шаг 4. Получен допустимый и оптимальный план.

29

Библиографический список

1. Математическое моделирование экономических процессов на железнодорожном транспорте : учебник для вузов / Под ред. А. Б. Каплана. – М. : Транспорт, 1984.
2. *Гольштейн Е. Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольдштейн. – М. : Наука, 1969.
3. *Карчик В. Г.* Экономико-математическое моделирование : учеб. пособие / В. Г. Карчик. – СПб. : Петербургский гос. университет путей сообщения, 2003.
4. *Карчик В. Г.* Оптимизация бизнес-решений на базе использования средств электронных таблиц : учеб. пособие / В. Г. Карчик. – СПб. : Петербургский гос. университет путей сообщения, 2003.
5. *Карчик В. Г.* Математическое моделирование экономических процессов на ж.-д. транспорте : метод. указания по практическим занятиям / В. Г. Карчик. – СПб. : Милена, 2001.
6. *Карчик В. Г.* Математическое моделирование экономических процессов на ж.-д. транспорте : метод. указания по курсовому проектированию / В. Г. Карчик. – СПб. : Милена, 2001.
7. *Карчик В. Г.* Математические методы в планировании и управлении на железнодорожном транспорте : учеб. пособие. Ч. 1 / В. Г. Карчик. – Л. : ЛИИЖТ, 1978.
8. *Карчик В. Г.* Математические методы в планировании и управлении на железнодорожном транспорте : учеб. пособие. Ч. 2 / В. Г. Карчик. – Л. : ЛИИЖТ, 1982.
9. Математическая статистика / Под ред. А. М. Длина. – М. : Высшая школа, 1975.
10. *Казмер Л.* Методы статистического анализа в экономике / Л. Казмер. – М. : Статистика, 1972.
11. *Попов А. М.* Экономико-математические методы и модели. Бакалавр. Прикладной курс : учебник / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – М. : Юрайт, 2015.
12. *Гармаш А.* Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник / А. Гармаш, И. Орлова, В. Федосеев. – М. : Юрайт, 2015.
13. *Стрикалов А.* Экономико-математические методы и модели : пособие к решению задач / А. Стрикалов, И. Печенежская. – М. : Юрайт, 2008.
14. *Бородецкий Г.* Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации. Высшее профессиональное образование. Бакалавриат / Г. Бородецкий, Д. Гусев. – М. : Academia, 2010.

30

Приложение

Таблица П1

Критические точки *F*-распределения

Число степеней свободы знаменателя	Число степеней свободы числителя											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	242	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,3	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,4	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,7	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,1	4,06	4,03	4,0
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,6	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,34	3,31	3,07
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,1	2,91
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,79

Таблица П2

Нижние границы значимости коэффициента корреляции

$n-2$	0,95	$n-2$	0,95	$n-2$	0,95
1	0,997	8	0,632	15	0,482
2	0,95	9	0,602	16	0,468
3	0,878	10	0,576	17	0,455
4	0,811	11	0,553	18	0,444
5	0,754	12	0,532	19	0,433
6	0,707	13	0,514	20	0,423
7	0,666	14	0,497	25	0,381

31

Таблица П3

Плотность вероятности нормального распределения

t	*f*(*t*)	*t*	*f*(*t*)	*t*	*f*(*t*)	*t*	*f*(*t*)	*t*	*f*(*t*)	*t*	*f*(*t*)	*t*	*f*(*t*)
0	0,3989	0,6	0,3332	1,2	0,1942	1,8	0,079	2,4	0,0224	3	0,0044	3,6	0,0006
0,01	0,3989	0,61	0,3312	1,21	0,1919	1,81	0,0775	2,41	0,0219	3,01	0,0043	3,61	0,0006
0,02	0,3989	0,62	0,3229	1,22	0,1895	1,82	0,0761	2,42	0,0213	3,02	0,0042	3,62	0,0006
0,03	0,3988	0,63	0,3271	1,23	0,1872	1,83	0,0748	2,43	0,0208	3,03	0,004	3,63	0,0005
0,04	0,3986	0,64	0,3251	1,24	0,1849	1,84	0,0734	2,44	0,0203	3,04	0,0039	3,64	0,0005
0,05	0,3984	0,65	0,323	1,25	0,1826	1,85	0,0721	2,45	0,0198	3,05	0,0038	3,65	0,0005
0,06	0,3982	0,66	0,3209	1,26	0,1804	1,86	0,0707	2,46	0,0194	3,06	0,0037	3,66	0,0005
0,07	0,398	0,67	0,3187	1,27	0,1781	1,87	0,0694	2,47	0,0189	3,07	0,0036	3,67	0,0005
0,08	0,3977	0,68	0,3166	1,28	0,1758	1,88	0,0681	2,48	0,0184	3,08	0,0035	3,68	0,0005
0,09	0,3973	0,69	0,3144	1,29	0,1736	1,89	0,0669	2,49	0,018	3,09	0,0034	3,69	0,0004
0,1	0,397	0,7	0,3123	1,3	0,1714	1,9	0,0656	2,5	0,0175	3,1	0,0033	3,7	0,0004
0,11	0,3965	0,71	0,3101	1,31	0,1691	1,91	0,0644	2,51	0,0171	3,11	0,0032	3,71	0,0004
0,12	0,3961	0,72	0,3079	1,32	0,1669	1,92	0,0632	2,52	0,0167	3,12	0,0031	3,72	0,0004
0,13	0,3956	0,73	0,3056	1,33	0,1647	1,93	0,062	2,53	0,0163	3,13	0,003	3,73	0,0004
0,14	0,3951	0,74	0,3034	1,34	0,1626	1,94	0,0608	2,54	0,0158	3,14	0,0029	3,74	0,0004
0,15	0,3945	0,75	0,3011	1,35	0,1604	1,95	0,0596	2,55	0,0154	3,15	0,0028	3,75	0,0004
0,16	0,3939	0,76	0,2989	1,36	0,1582	1,96	0,0584	2,56	0,0151	3,16	0,0027	3,76	0,0003
0,17	0,3932	0,77	0,2966	1,37	0,1561	1,97	0,0573	2,57	0,0147	3,17	0,0026	3,77	0,0003
0,18	0,3925	0,78	0,2943	1,38	0,1539	1,98	0,0562	2,58	0,0143	3,18	0,0025	3,78	0,0003
0,19	0,3918	0,79	0,292	1,39	0,1518	1,99	0,0551	2,59	0,0139	3,19	0,0025	3,79	0,0003
0,2	0,391	0,8	0,2897	1,4	0,1497	2	0,054	2,6	0,0136	3,2	0,0024	3,8	0,0003
0,21	0,3902	0,81	0,2874	1,41	0,1476	2,01	0,0529	2,61	0,0132	3,21	0,0023	3,81	0,0003
0,22	0,3894	0,82	0,285	1,42	0,1456	2,02	0,0519	2,62	0,0129	3,22	0,0022	3,82	0,0003
0,23	0,3885	0,83	0,2827	1,43	0,1435	2,03	0,0508	2,63	0,0126	3,23	0,0022	3,83	0,0003
0,24	0,3876	0,84	0,2803	1,44	1,415	2,04	0,0498	2,64	0,0122	3,24	0,0021	3,84	0,0003
0,25	0,3867	0,85	0,278	1,45	0,1394	2,05	0,0488	2,65	0,0119	3,25	0,002	3,85	0,0002
0,26	0,3857	0,86	0,2756	1,46	0,1374	2,06	0,0478	2,66	0,0116	3,26	0,002	3,86	0,0002
0,27	0,3847	0,87	0,2732	1,47	0,1354	2,07	0,0468	2,67	0,0113	3,27	0,0019	3,87	0,0002
0,28	0,3836	0,88	0,2709	1,48	0,1334	2,08	0,0459	2,68	0,011	3,28	0,0018	3,88	0,0002
0,29	0,3825	0,89	0,2685	1,49	0,1315	2,09	0,0449	2,69	0,0107	3,29	0,0018	3,89	0,0002
0,3	0,3814	0,9	0,2661	1,5	0,1295	2,1	0,044	2,7	0,0104	3,3	0,0017	3,9	0,0002

Окончание табл. П3

t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$
0,31	0,3802	0,91	0,2637	1,51	0,1276	2,11	0,0431	2,71	0,0101	3,31	0,0017	3,91	0,0002
0,32	0,379	0,92	0,2613	1,52	0,1257	2,12	0,0422	2,72	0,0099	3,32	0,0016	3,92	0,0002
0,33	0,3778	0,93	0,2589	1,53	0,1238	2,13	0,0413	2,73	0,0096	3,33	0,0016	3,93	0,0002
0,34	0,3765	0,94	0,2565	1,54	0,1219	2,14	0,0404	2,74	0,0093	3,34	0,0015	3,94	0,0002
0,35	0,3752	0,95	0,2541	1,55	0,12	2,15	0,0396	2,75	0,0091	3,35	0,0015	3,95	0,0002
0,36	0,3739	0,96	0,2516	1,56	0,1182	2,16	0,0387	2,76	0,0088	3,36	0,0014	3,96	0,0002
0,37	0,3726	0,97	0,2492	1,57	0,1163	2,17	0,0379	2,77	0,0086	3,37	0,0014	3,97	0,0002
0,38	0,3712	0,98	0,2468	1,58	0,1145	2,18	0,0371	2,78	0,0084	3,38	0,0013	3,98	0,0001
0,39	0,3697	0,99	0,2444	1,59	0,1127	2,19	0,0363	2,79	0,0081	3,39	0,0013	3,99	0,0001
0,4	0,3683	1	0,242	1,6	0,1109	2,2	0,0355	2,8	0,0079	3,4	0,0012	4	0,0001
0,41	0,3668	1,01	0,2396	1,61	0,1092	2,21	0,0347	2,81	0,0077	3,41	0,0012	4,01	0,0001
0,42	0,3653	1,02	0,2371	1,62	0,1074	2,22	0,0339	2,82	0,0075	3,42	0,0012	4,02	0,0001
0,43	0,3637	1,03	0,2347	1,63	0,1057	2,23	0,0332	2,83	0,0073	3,43	0,0011	4,03	0,0001
0,44	0,3621	1,04	0,2223	1,64	0,104	2,24	0,0325	2,84	0,0071	3,44	0,0011	4,04	0,0001
0,45	0,3605	1,05	0,2299	1,65	0,1023	2,25	0,0317	2,85	0,0069	3,45	0,001	4,05	0,0001
0,46	0,3589	1,06	0,2275	1,66	0,1006	2,26	0,031	2,86	0,0067	3,46	0,001	4,06	0,0001
0,47	0,3572	1,07	0,2251	1,67	0,0989	2,27	0,0303	2,87	0,0065	3,47	0,001	4,07	0,0001
0,48	0,3555	1,08	0,2227	1,68	0,0973	2,28	0,0297	2,88	0,0063	3,48	0,0009	4,08	0,0001
0,49	0,3538	1,09	0,2203	1,69	0,0957	2,29	0,029	2,89	0,0061	3,49	0,0009	4,09	0,0001
0,5	0,3521	1,1	0,2179	1,7	0,094	2,3	0,0283	2,9	0,006	3,5	0,0009	4,1	0,0001
0,51	0,3503	1,11	0,2155	1,71	0,0925	2,31	0,0277	2,91	0,0058	3,51	0,0008	4,11	0,0001
0,52	0,3485	1,12	0,2131	1,72	0,0909	2,32	0,027	2,92	0,0056	3,52	0,0008	4,12	0,0001
0,53	0,3467	1,13	0,2107	1,73	0,0893	2,33	0,0264	2,93	0,0055	3,53	0,0008	4,13	0,0001
0,54	0,3448	1,14	0,2083	1,74	0,0878	2,34	0,0258	2,94	0,0053	3,54	0,0008	4,14	0,0001
0,55	0,3429	1,15	0,2059	1,75	0,0863	2,35	0,0252	2,95	0,0051	3,55	0,0007	4,15	0,0001
0,56	0,341	1,16	0,2036	1,76	0,0848	2,36	0,0246	2,96	0,005	3,56	0,0007	4,16	0,0001
0,57	0,3391	1,17	0,2012	1,77	0,0833	2,37	0,0241	2,97	0,0048	3,57	0,0007	4,17	0,0001
0,58	0,3372	1,18	0,1989	1,78	0,0818	2,38	0,0235	2,98	0,0047	3,58	0,0007	4,18	0,0001
0,59	0,3352	1,19	0,1965	1,79	0,0804	2,39	0,0229	2,99	0,0046	3,59	0,0006	4,19	0,0001

33

34

Содержание

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ

Методические указания и задания к курсовому проекту

Разработали: к. э. н., доцент **В. Г. Карчик**,
к. э. н., доцент **Б. П. Немцов**

Редактор и корректор *И. А. Шабранская*

Компьютерная верстка *Л. А. Каратановой*

Подписано в печать с оригинал-макета 17.02.2016.
Формат 60×84 1/16. Бумага для множ. апп. Печать ризография.
Усл. печ. л. 2,25. Тираж 150 экз.
Заказ 175.
ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.
Типография ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.